

A savoir

Période des planètes

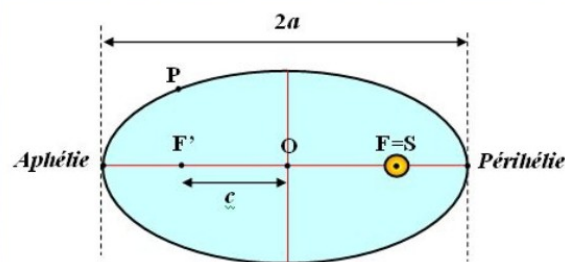
La troisième loi de Kepler

Le carré de la période de révolution T d'une planète autour du Soleil divisée par le demi-grand axe a au cube de l'orbite elliptique est égale à une constante.

$$\frac{T^2}{a^3} = \text{constante}$$

En explicitant la contante :

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM} = \text{constante}$$



Démonstration dans le cas d'une trajectoire circulaire

Le mouvement de rotation :

$$\Omega = 2\pi \cdot f = \frac{2\pi}{T}$$

$$T = \frac{2\pi}{\Omega}$$

Ω : Vitesse angulaire (rad/s)

V : Vitesse linéaire (m/s)

R : Rayon de la trajectoire (m)

T : Période de rotation (s)

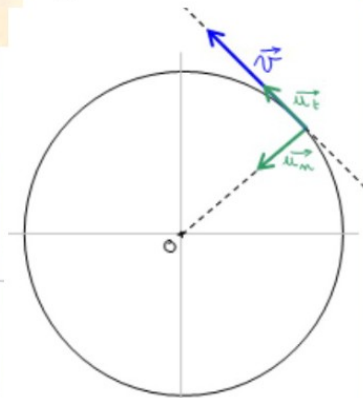
$$\Omega = v/R$$

$$T = \frac{2\pi \cdot R}{v}$$

L'accélération centripète (dirigée vers le centre)

$$a_n = \frac{v^2}{R}$$

$$a_n = \frac{4\pi^2 \cdot R}{T^2}$$



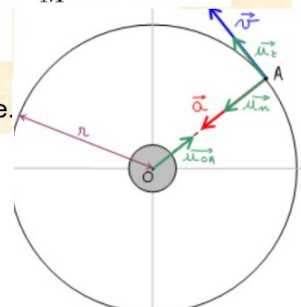
Application du principe fondamental de la dynamique

$$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a} \quad G \cdot \frac{m \cdot M}{R^2} \vec{u}_n = m \cdot \vec{a}$$

La seule force qui intervient est la gravitation universelle.
En simplifiant et en utilisant la formule de l'accélération :

$$\frac{G \cdot M}{4\pi^2} = \frac{R^3}{T^2} \quad \text{ou encore} \quad \frac{4\pi^2}{G \cdot M} = \frac{T^2}{R^3}$$

m : masse de la planète
 M : masse du soleil



1. Les étoiles Tatoo1 et Tatoo2

1.1. Le texte nous dit que la distance entre Tatoo1 et Tatoo2 est légèrement supérieure à 10 millions de km : on prendra cette valeur par la suite.

On peut mesurer sur la photo que le diamètre (soit $2r$) d'une étoile est 6 mm et que la distance d entre les étoiles est 19 mm en partant des « coins » supérieurs gauches.

Par proportionnalité :

$2r$	$\swarrow \quad \searrow$	6 mm
$d = 10 \text{ Millions de km}$	$\nwarrow \quad \nearrow$	19 mm

Ainsi : $2r = \frac{10 \times 6}{19}$ donc $r = \frac{10 \times 6}{19 \times 2} = 1,57 \text{ millions de km}$.

Ce qui compte tenu du manque de précision peut être effectivement considéré comme proche de 2 millions de km.



Image du film Star wars Episode IV : A new hope (© Lucasfilm Ltd)
Luke Skywalker marchant au coucher de soleils.

1.2. En supposant que les étoiles ont la même masse volumique que le Soleil :

$$\rho_{\text{SOLEIL}} = \frac{M_{\text{SOLEIL}}}{V_{\text{SOLEIL}}} = \frac{M_{\text{SOLEIL}}}{\frac{4}{3}\pi r_{\text{SOLEIL}}^3} = \rho_{\text{TATOO}} = \frac{M_{\text{TATOO}}}{\frac{4}{3}\pi r_{\text{TATOO}}^3}$$

$$\text{Ainsi } \frac{M_{\text{SOLEIL}}}{\frac{4}{3}\pi r_{\text{SOLEIL}}^3} = \frac{M_{\text{TATOO}}}{\frac{4}{3}\pi r_{\text{TATOO}}^3}$$

$$\text{Donc } M_{\text{TATOO}} = M_{\text{SOLEIL}} \times \frac{\frac{4}{3}\pi r_{\text{TATOO}}^3}{\frac{4}{3}\pi r_{\text{SOLEIL}}^3} = M_{\text{SOLEIL}} \times \left(\frac{r_{\text{TATOO}}}{r_{\text{SOLEIL}}} \right)^3$$

On prend la valeur de 2 millions de kilomètres indiquée.

$$M_{\text{TATOO}} = 2,0 \times 10^{30} \times \left(\frac{2 \times 10^6}{7,0 \times 10^5} \right)^3 = 4,7 \times 10^{31} \text{ kg, soit un ordre de grandeur de } 10^{31} \text{ kg.}$$

Le Soleil a une masse $M_{\text{SOLEIL}} = 2,0 \times 10^{30} \text{ kg}$, ainsi $\frac{M_{\text{TATOO}}}{M_{\text{SOLEIL}}} = \frac{4,66 \times 10^{31}}{2,0 \times 10^{30}} = 23$

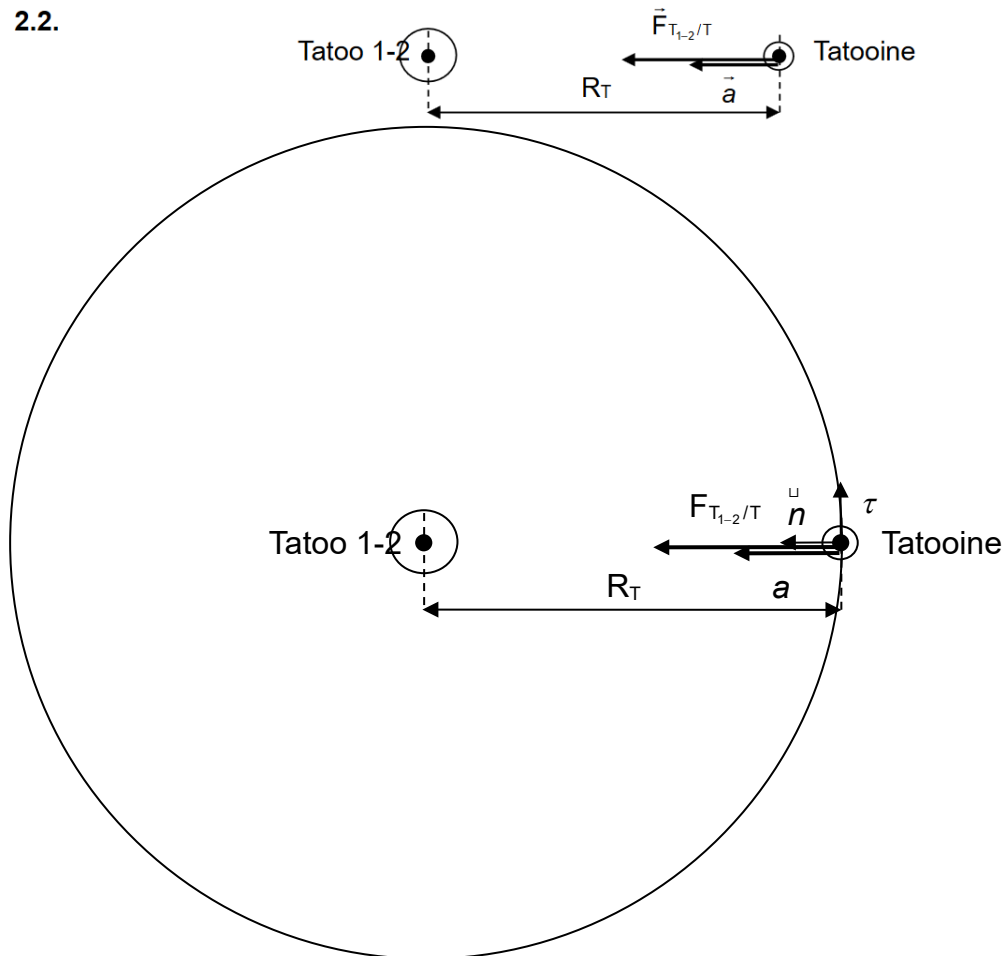
Les étoiles TATOO sont environ 23 fois plus massives que le Soleil.

2. Tatooine en orbite

2.1. D'après le texte, « du point de vue de l'étoile, tout se passe comme si les étoiles ne faisaient qu'une ».

On peut remarquer que les 2 étoiles ayant la même masse, il est cohérent de trouver une masse équivalente qui correspond (environ) au double de la masse trouvée pour une étoile à la question 1.2.

2.2.



2.3. Méthode 1 :

On étudie le système {Tatooine}, de masse M_T , dans le référentiel Tatooцентриque supposé galiléen. Sa trajectoire est un cercle de rayon : R_T .

Le repère d'étude est le repère de Frénet (T, n, τ) d'origine le centre de la planète Tatooine T et de vecteurs unitaires n et τ .

Tatooine est soumise à la force gravitationnelle exercée par Tatoo1-2 :

$$\vec{F}_{T_{1-2}/T} = G \cdot \frac{M_{T_{1-2}} \cdot M_T}{R_T^2} \cdot \vec{n}.$$

La deuxième loi de Newton appliquée à Tatooine (avec M_T constante) donne :

$$\vec{F}_{T_{1-2}/T} = M_T \cdot \vec{a}$$

$$\text{soit } G \cdot \frac{M_{T_{1-2}} \cdot M_T}{R_T^2} \cdot \vec{n} = M_T \cdot \vec{a} \text{ donc } \vec{a} = G \cdot \frac{M_{T_{1-2}}}{R_T^2} \cdot \vec{n}$$

Dans le repère de Frénet, l'accélération d'un objet en mouvement circulaire s'écrit :

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \cdot \vec{\tau} + \frac{v^2}{R_T} \cdot \vec{n}$$

En égalant les deux expressions précédentes de l'accélération, il vient :

$$G \cdot \frac{M_{T_{1-2}}}{R_T^2} \cdot \vec{n} = \frac{dv}{dt} \cdot \vec{\tau} + \frac{v^2}{R_T} \cdot \vec{n}$$

Par identification, on a :

$$\text{Sur } n : \frac{v^2}{R_T} = G \cdot \frac{M_{T_{1-2}}}{R_T^2} \text{ (utile pour la question suivante)}$$

$$\text{Sur } \tau : \frac{dv}{dt} = 0 \text{ alors } \mathbf{v = Cte} : \text{le mouvement de Tatooine est uniforme}$$

$$\mathbf{2.4. Suite méthode 1 : D'après la question précédente : } \frac{v^2}{R_T} = G \cdot \frac{M_{T_{1-2}}}{R_T^2}$$

$$\text{donc } v^2 = G \cdot \frac{M_{T_{1-2}}}{R_T} \text{ ainsi } v = \sqrt{G \cdot \frac{M_{T_{1-2}}}{R_T}}.$$

Tatooine ayant un mouvement circulaire et uniforme, elle décrit le périmètre $2\pi \cdot R_T$

pendant la durée d'une période T à la vitesse v telle que : $v = \frac{2\pi \cdot R_T}{T}$ donc $T = \frac{2\pi \cdot R_T}{v}$

$$\text{En utilisant l'expression de } v \text{ précédente : } T = \frac{2\pi \cdot R_T}{\sqrt{G \cdot \frac{M_{T_{1-2}}}{R_T}}}$$

Fiche N°2-4-1
Lois de Kepler

Lois de Kepler et
Starwars

$$T^2 = \frac{4\pi^2 \cdot R_T^2}{G \cdot \frac{M_{T1-2}}{R_T}} = \frac{4\pi^2 \cdot R_T^3}{G \cdot M_{T1-2}}$$

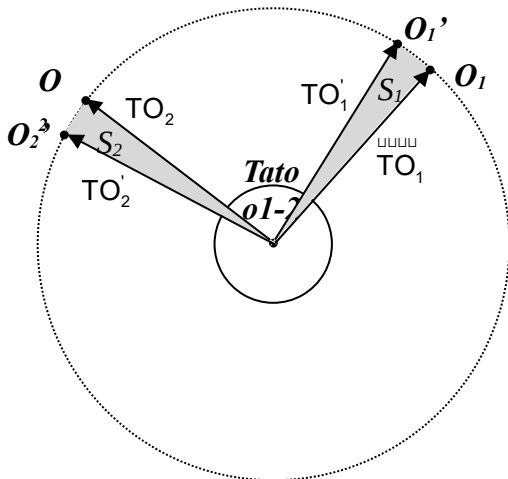
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{R_T^3}{G \cdot M_{T1-2}}}$$

On prend un rayon de 200 millions de km conformément au texte :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{(200 \times 10^6 \times 10^3)^3}{6,67 \times 10^{-11} \times 9,5 \times 10^{31}}} = 7,06 \times 10^6 \text{ s} = \frac{7,06 \times 10^6}{3600 \times 24 \times 365,25} = 0,22 \text{ année}$$

Une année sur Tatooine ne dure que 0,22 année terrestre.

Méthode 2 : Deuxième loi de Kepler



Méthode 2 : Deuxième loi de Kepler

Le rayon vecteur $\overline{TO}$ allant du centre T de Tatoo 1-2 au centre O de Tatooine balaye des **surfaces égales** pendant des **intervalles de temps égaux**.

Les aires S_1 et S_2 sont égales.

Pendant la durée Δt ,

Tatooine parcourt l'arc $\widehat{TO_1O_1'}$ à la vitesse v_1

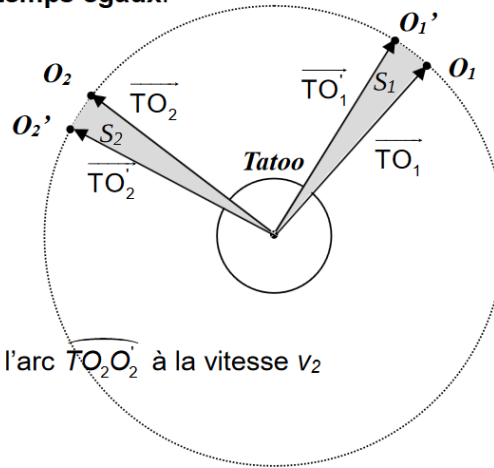
$$v_1 = \frac{\widehat{TO_1O_1'}}{\Delta t}$$

Pendant cette même durée, Tatooine parcourt l'arc $\widehat{TO_2O_2'}$ à la vitesse v_2

$$v_2 = \frac{\widehat{TO_2O_2'}}{\Delta t}$$

D'après la deuxième loi de Kepler les aires S_1 et S_2 sont égales alors les arcs $\widehat{TO_1O_1'}$ et $\widehat{TO_2O_2'}$ sont égaux.

Donc $v_1 = v_2$, le mouvement de Tatooine est **uniforme**.



Méthode 2 :

D'après la 3^{ème} loi de Kepler : Le rapport du carré de la période de révolution par le cube du demi-grand axe de l'ellipse (ici du cube du rayon du cercle) est une constante qui ne dépend que du centre attracteur (ici Tatoo 1-2).

$$\frac{T^2}{R_T^3} = \frac{4\pi^2}{G.M_{T1-2}}$$

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2.(R_T)^3}{G.M_{T1-2}}} = 2\pi\sqrt{\frac{R_T^3}{G.M_{T1-2}}}$$

Calcul voir ci-dessus.

Remarque : en toute rigueur la 3^{ème} loi de Kepler ne donne pas l'expression de la constante.